

# NOTAS SOBRE LA UTILIZACION DE LA FUNCION DE GOMPERTZ EN EL ESTUDIO DE LA FECUNDIDAD

*Evelyn Spielman*

## OBSERVATIONS ABOUT THE USE OF THE GOMPERTZ FUNCTION IN THE STUDY OF FERTILITY

### SUMMARY

The purpose of this work is to study the levels, patterns and trends of fertility by cohorts within four Latin American countries during a period of approximately twenty years.

The term level should be interpreted as the total number of children born alive (per woman or per thousand women) at the end of her reproductive period; by pattern should be understood the evolution of fertility according to age group of the women, which can be represented by the curves of age-specific fertility rates. As to trend, it should be interpreted as the change or lack of change in fertility over time.

In order to fulfill this purpose, it was decided to study the level and pattern of fertility for real and hypothetical cohorts, and then, comparing the results obtained in each cohort, to investigate the trend.

Due to the different characteristics of fertility analyses by real or by hypothetical cohorts, it was decided to adjust the results by using the Gompertz function.

The conclusion was reached that, although this function has great possibilities for adjustment purposes, it is not satisfactory in this situation on account of the poor quality of the basic information.

## I. INTRODUCCION

### 1. Objetivos

El presente trabajo tuvo por objeto inicial estudiar el comportamiento de la fecundidad por cohortes durante un período de 20 años aproximadamente en las zonas rurales de 4 países de la América Latina. En concreto, pretendíase analizar la fecundidad según su nivel, su patrón y su tendencia a través del tiempo.

Entiéndese por nivel la indicación del número total de hijos nacidos vivos (por mujer o por mil mujeres) al término del período reproductivo de la mujer; por consiguiente, el nivel queda determinado por la tasa total de fecundidad.

El patrón es el comportamiento de la fecundidad de acuerdo con los grupos de edades de las mujeres y puede representarse mediante las curvas de las tasas específicas por edad, las que se pueden analizar mediante la mediana, la varianza, etc. Por último, el establecimiento de la tendencia permite indicar si el nivel de la fecundidad se mantiene constante o registra alteraciones (aumento o disminución durante el período considerado).

Para alcanzar el objetivo señalado se decidió estudiar separadamente el nivel y el patrón de cada cohorte real e hipotética. Después, mediante la comparación de los resultados obtenidos para las distintas cohortes, se analizaría la tendencia. Por consiguiente, el análisis de la fecundidad por cohortes permite una comprensión temporal del fenómeno.

### 2. Cohortes reales y cohortes hipotéticas.

El análisis de la fecundidad por cohortes reales e hipotéticas presenta características distintas. La cohorte real permite determinar la fecundidad de un mismo grupo de mujeres (excluyendo en este caso a las fallecidas y a las migrantes) durante su período reproductivo, esto es, entre los 15 y los 49 años de edad; de ahí que, según una suposición implícita en el estudio de las cohortes reales, la fecundidad de las mujeres fallecidas o migrantes no es distinta de la fecundidad de las sobrevivientes. Otra suposición básica consiste en que las cohortes reales no están sujetas a efectos temporales, como las guerras, las crisis económicas, etc., porque en caso contrario originarían una curva de fecundidad anormal, toda vez que tales efectos temporales no son constantes. Por ejemplo, es de esperar que una cohorte de mujeres que inició su período reproductivo en el año 1930 vea su fecundidad afectada en forma anormal como consecuencia de la guerra ocurrida entre los años de 1939 y 1945. Además, las suposiciones se aceptan por el hecho de que no existen datos para rechazarlas.

Ninguna de las suposiciones señaladas se presenta en el caso de las cohortes hipotéticas porque éstas están compuestas por grupos distintos de mujeres que completan su período reproductivo de 15 a 19 años, dentro de los distintos grupos de edades, en un determinado año. De esta manera, una cohorte hipotética mantiene constante, para todos los grupos de edades, el efecto temporal. Una cohorte hipotética anula asimismo la incidencia de la fecundidad diferencial porque, conforme se dijo anteriormente, la cohorte está formada por grupos distintos de mujeres.

### 3. Elección del medio analítico.

Teniendo en cuenta las consideraciones apuntadas y basándose en algunas referencias bibliográficas, se optó por utilizar la función de Gompertz por reunir aparentemente las características necesarias para el estudio. Existía además el antecedente de que otros autores, como Martins (1967), Carrasco (1972), Murphy y Nagnur, también habían empleado esta función en el estudio de la fecundidad. Esta última circunstancia hacía posible comparar los resultados que se obtuviesen.

## II. LA FUNCION DE GOMPERTZ COMO MEDIO ANALITICO PARA EL ESTUDIO DE LA FECUNDIDAD

La finalidad que se persigue al ajustar las tasas de fecundidad con funciones matemáticas es transformar el conjunto de informaciones básicas existentes en una serie de medidas que resuman y permitan comprender el desenvolvimiento de la fecundidad.

Además, en el caso de que las tasas presenten irregularidades menores, se pueden rectificar mediante una función ajustada. Un objetivo secundario consiste en extrapolar las tasas para completar la fecundidad de las cohortes truncas. Se decidió aplicar las tasas acumuladas (suma de las tasas específicas por edad), por suponerse que en esta forma se evitaría el problema de la mala declaración de la edad, tanto de la madre como del hijo. Por consiguiente, las tasas específicas afectadas se obtienen por derivación.

La función de Gompertz se expresa analíticamente:

$$Y(t) = KA^{B^t}; \quad K > 0; \quad 0 < A < 1; \quad 0 < B < 1$$

donde  $K$ ,  $A$  y  $B$  son los parámetros que hay que determinar;  $t$  representa la edad y  $Y(t)$  es la fecundidad acumulada hasta la edad  $t$  inclusive.

La función de Gompertz es de gran utilidad porque ofrece la posibilidad de una interpretación demográfica de los parámetros  $K$ ,  $A$  y  $B$ .

Cuando  $t$  crece infinitamente,  $Bt$  tiende a cero y  $Y(t)$  se aproxima a  $K$ . En otras palabras,  $K$  es la asíntota superior de la función de Gompertz. O sea,  $K$  puede interpretarse como si fuera la tasa total de fecundidad de la cohorte real o hipotética. Cuando  $t$  tiende a cero,  $Y(t)$  se aproxima a  $KA$ ; esto es,  $A$  representa una proporción de la tasa total ya obtenida. La interpretación del parámetro  $B$  es más compleja. La intentaron Murphy y Nagnur, quienes mantuvieron fijos los parámetros  $K$  y  $A$  y construyeron una familia de curvas de tasas específicas (primera derivada de la función de Gompertz) con diferentes valores de  $B$ . Estos autores encontraron que a medida que aumenta  $B$ , se achata la curva de las tasas específicas y aumenta por lo tanto la varianza de la curva.

La principal desventaja que presenta la función de Gompertz es el mal ajuste en las edades extremas. Esto ocurre porque la función tiene una asíntota superior ( $K$ ) y una inferior (0). Esto significa que aunque teóricamente no existe fecundidad entre las mujeres mayores de 50 años y menores de 15, analíticamente existiría todavía la posibilidad de que tuvieran hijos. Conviene señalar además que el ajuste es más deficiente en el caso de las tasas específicas, pues éstas constituyen una primera derivada de las tasas acumuladas.

### III. DESARROLLO

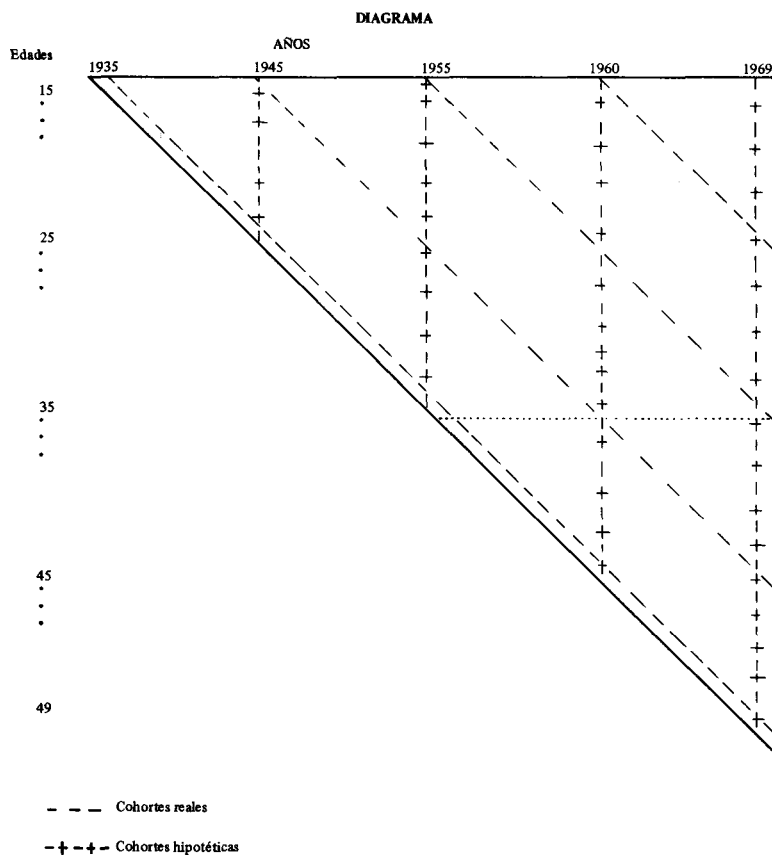
Los datos básicos para el programa de ajuste de la función son los siguientes:

- a) Las tasas acumuladas por edades individuales, y
- b) Las edades inicial y final del período reproductivo.

Los datos fundamentales acerca de las tasas se obtienen de la historia de los partos, utilizándose para ello las dos variables siguientes:

- a) el dato del nacimiento de la entrevistada, y
- b) el dato del nacimiento del hijo.

La historia de los partos permite obtener informaciones retrospectivas. Como se señaló anteriormente, las investigaciones PECFAL-RURAL se efectuaron con mujeres que tenían entre 15 y 49 años en 1969 y en 1970. De este modo se pudo obtener informaciones desde el año 1935 hasta el año de la entrevista, pues una mujer que en 1969 tenía 49 años, en 1935 tenía 15 y ya había entrado en su período reproductivo. El principal problema que se presenta en el análisis de estos antecedentes del pasado es la forma triangular de la información básica, o sea, el truncamiento de las cohortes reales e hipotéticas (véase el diagrama).



Se decidió ajustar 21 cohortes reales y 21 cohortes hipotéticas, distribuidas de la siguiente manera:

- Cohortes reales: de 1935 a 1955 inclusive. Una cohorte de 1950, por ejemplo, se refiere a un grupo de mujeres cuyo período reproductivo se inició en 1950. Esta cohorte es la única (15 a 49 años) con 35 valores; el número de informaciones disminuye gradualmente hasta la cohorte de 1955 (15 a 29 años, con 15 valores).
- Cohortes hipotéticas: de 1949 a 1969 inclusive. La cohorte de 1949 es la que tiene el menor número de informaciones (15 a 29 años; 15 valores), aumentando gradualmente hasta la cohorte de 1969 (15 a 49 años; 35 valores), que es la única completa.

Se determinó que 15 valores constituirían el número mínimo de los datos básicos necesarios para el análisis, teniéndose en cuenta el supuesto de que las mujeres de 30 años ya habían completado el 50 por ciento de su fecundidad total <sup>1/</sup>.

#### IV. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

##### 1. Resultados

Se ajustó únicamente la función de Gompertz a 84 cohortes reales e hipotéticas de Costa Rica y Perú (42 reales y 42 hipotéticas). No se prosiguió con la función porque el análisis de los resultados ya obtenidos demostró la existencia de problemas que hasta ahora parecen imposibles de resolver.

El coeficiente de correlación múltiple ( $R^2$ ) para las 84 cohortes ajustadas presentaba un valor de 0,9, en tanto ( $x^2$ ) variaba entre 0 y 1. Ambos resultados indican un buen ajuste de la función a los datos observados. Se estableció que el número máximo de tasas acumuladas para cada cohorte era de 35, pues éste representa el intervalo entre la edad inicial (15) y la edad final (49) del período reproductivo. En este estudio, el número de tasas varió entre 15 y 33 (múltiplos de 3; véase el apéndice), lo que indica la presencia de cohortes truncas y prácticamente completas.

En los cuadros 1 y 2 aparecen dos cohortes estudiadas, con las tasas observadas y ajustadas, y en el cuadro 3 la serie de parámetros referentes a las cohortes hipotéticas de Costa Rica para los años 1949-1969. La cohorte de 1949 es la que tiene menos datos observados y la de 1969 es la más completa. Obsérvese al comienzo un aumento del nivel de la fecundidad y hacia el final una disminución.

##### 2. Prueba del empleo de la función de Gompertz

Una vez obtenidos los valores correspondientes de las 84 cohortes, se procedió a efectuar una prueba con el propósito de verificar eventuales alteraciones en el empleo de la función de Gompertz con cohortes truncas y completas en diferentes edades. Esta prueba es muy importante porque la mayor parte de las cohortes están truncas e importaba saber si un número variable de valores por cohorte afectaba o no la estimación de los parámetros. Dicha prueba consistió en truncar las cohor-

---

<sup>1/</sup> Véase el apéndice; en él se describe el método de ajuste de la función de Gompertz.

tes, ajustarlas a la función de Gompertz y comparar los nuevos parámetros y las tasas así ajustados con los resultados anteriores. La prueba se aplicó a 8 cohortes distintas, obteniéndose siempre los mismos resultados: variaban tanto los parámetros como las tasas ajustadas.

De los tres parámetros  $K$ ,  $A$  y  $B$ , el que ofrece mayor potencialidad analítica es  $K$ , porque es posible interpretarlo como la tasa total de fecundidad. Es por eso que los resultados de las 8 cohortes truncadas a la edad de 35 años (cuadros 4 y 5) son bastante interesantes, pues el nuevo parámetro  $K$  es siempre más bajo que el anterior. En los cuadros 1 y 2 puede observarse que las nuevas tasas extrapoladas son más bajas que las ajustadas, las que a su vez ya eran inferiores a las observadas. El procedimiento culmina con un nuevo valor de  $K$  inferior al precedente y puede decirse con bastante seguridad que es aún más bajo que el observado. Esta última observación se basa en el hecho de que el parámetro  $K$  es en realidad una extrapolación *ad infinitum* de la función de Gompertz.

El análisis de los cuadros 6 y 7 destaca otro aspecto importante de la función. Se observa que el valor de equis cuadrado para las cohortes truncadas a la edad de 35 años es siempre menor que el valor anterior. Esto confirma lo que se advirtió en el capítulo II en relación con el mal ajuste de la función de Gompertz en las edades extremas. Al realizar la prueba se eliminaron los valores finales y esto permitió un mejor ajuste. Pero la pequeña ventaja obtenida con este mejor ajuste se pierde con la extrapolación de las tasas, como lo indican los resultados obtenidos para las 8 cohortes.

Así pues, es evidente que la función de Gompertz cuando se utiliza para extrapolar, tiende a subestimar las tasas. Volviendo al cuadro 3, obsérvese que estos resultados son engañosos, pues en su mayoría las cohortes son trucas y por consiguiente los parámetros  $K$  están extrapolados.

### 3. Conclusión

Considerando que el objetivo inicial consistía en estudiar el comportamiento de la fecundidad durante un período de 20 años por medio de cohortes y recordando también que las informaciones retrospectivas tienen forma triangular (cohortes trucas), puede concluirse que la función de Gompertz, aun cuando ofrece grandes posibilidades de ajuste, no sirve, de acuerdo con la información disponible, para el análisis deseado. En la práctica, el problema se origina en el truncamiento de las informaciones básicas.

Cuadro 1

**COSTA RICA: TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD  
REFERENTES A LA COHORTE HIPOTETICA DE 1963**

Edades	Tasas observadas	Tasas ajustadas	Prueba
15	0,013	0,214	0,191
16	0,196	0,332	0,307
17	0,384	0,489	0,463
18	0,604	0,688	0,665
19	0,909	0,931	0,912
20	1,256	1,215	1,204
21	1,673	1,537	1,535
22	2,026	1,891	1,898
23	2,327	2,271	2,287
24	2,656	2,669	2,693
25	3,070	3,078	3,107
26	3,548	3,491	3,522
27	3,914	3,901	3,930
28	4,328	4,303	4,327
29	4,622	4,693	4,707
30	5,015	5,065	5,068
31	5,349	5,419	5,406
32	5,772	5,751	5,721
33	5,985	6,061	6,012
34	6,237	6,349	6,279
35	6,650	6,614	6,523
36	6,916	6,858	6,743*
37	7,109	7,080	6,943*
38	7,295	7,282	7,123*
39	7,457	7,465	7,285*
40	7,617	7,631	7,429*
41	7,847	7,780	7,558*
42	-	7,914*	7,672*
43	-	8,034*	7,774*
44	-	8,142*	7,865*
45	-	8,238*	7,945*
46	-	8,324*	8,016*
47	-	8,400*	8,078*
48	-	8,469*	8,133*
49	-	8,529*	8,182*

- Falta de información básica.

\* Valores extrapolados.



Cuadro 2

PERU: TASAS ACUMULADAS DE FECUNDIDAD REFERENTES A  
LA COHORTE HIPOTETICA DE 1966

Edades	Tasas observadas	Tasas ajustadas	Prueba
15	0,063	0,202	0,178
16	0,158	0,293	0,267
17	0,306	0,411	0,384
18	0,511	0,557	0,533
19	0,672	0,733	0,713
20	0,985	0,939	0,926
21	1,203	1,174	1,169
22	1,532	1,437	1,441
23	1,767	1,724	1,736
24	2,084	2,032	2,052
25	2,377	2,357	2,383
26	2,833	2,695	2,724
27	3,108	3,041	3,070
28	3,351	3,391	3,417
29	3,684	3,741	3,761
30	4,045	4,089	4,097
31	4,370	4,430	4,423
32	4,657	4,762	4,737
33	5,033	5,083	5,037
34	5,333	5,391	5,321
35	5,711	5,685	5,589
36	6,086	5,964	5,840*
37	6,250	6,228	6,074*
38	6,525	6,476	6,291*
39	6,733	6,708	6,492*
40	6,838	6,925	6,677*
41	7,080	7,127	6,847*
42	7,193	7,314	7,003*
43	7,631	7,486	7,146*
44	7,680	7,646	7,275*
45	-	7,793*	7,394*
46	-	7,928*	7,501*
47	-	8,051*	7,599*
48	-	8,165*	7,687*
49	-	8,269*	7,766*

- Falta de información básica.

\* Valores extrapolados.

**COSTA RICA: VALORES DE LOS PARAMETROS DE LA FUNCION  
DE GOMPERTZ PARA COHORTES HIPOTETICAS. 1949-1969**

A ñ o s	P a r á m e t r o s		
	K	A	B
1949	6,513	0,0180	0,8650
1950	9,727	0,0107	0,8776
1951	7,866	0,0117	0,8704
1952	8,242	0,0231	0,8862
1953	7,409	0,0254	0,8754
1954	8,260	0,0141	0,8585
1955	8,291	0,0171	0,8727
1956	9,614	0,0224	0,8764
1957	8,814	0,0219	0,8797
1958	9,025	0,0145	0,8784
1959	10,212	0,0229	0,8874
1960	9,022	0,0201	0,8849
1961	10,038	0,0194	0,8795
1962	10,073	0,0158	0,8800
1963	8,999	0,0238	0,8826
1964	9,776	0,0265	0,8844
1965	9,539	0,0143	0,8694
1966	8,618	0,0219	0,8756
1967	8,619	0,0199	0,8758
1968	8,482	0,0201	0,8814
1969	7,778	0,0180	0,8662

Cuadro 4

**COSTA RICA: COMPARACION ENTRE LOS PARAMETROS DE  
LAS MISMAS COHORTES TRUNCADAS EN EDADES DISTINTAS**

Edad al truncamiento	Parámetros	Cohortes hipotéticas			
		1960	1963	1966	1969
35	K	8,3679	8,5338	7,8224	7,3300
	A	0,0185	0,0224	0,0180	0,0152
	B	0,8756	0,8760	0,8605	0,8557
38	K	9,0221			
	A	0,0201			
	B	0,8845			
41	K		8,9990		
	A		0,0238		
	B		0,8826		
44	K			8,6179	
	A			0,0219	
	B			0,8756	
47	K				7,7781
	A				0,0180
	B				0,8662

Cuadro 5

PERU: COMPARACION ENTRE LOS PARAMETROS DE LAS  
MISMAS COHORTES TRUNCADAS EN EDADES DISTINTAS

Edad al truncamiento	Parámetros	Cohortes hipotéticas			
		1960	1963	1966	1969
35	K	7,2891	7,3234	8,4774	7,4615
	A	0,0202	0,0122	0,0210	0,0155
	B	0,8769	0,8670	0,8946	0,8554
38	K	7,8038			
	A	0,0217			
	B	0,8849			
41	K		8,4154		
	A		0,0161		
	B		0,8853		
44	K			9,2916	
	A			0,0217	
	B			0,9024	
47	K				7,7077
	A				0,0165
	B				0,8604

Cuadro 6

**COSTA RICA: COMPARACION DE LOS VALORES DE EQUIS  
CUADRADO DE LAS MISMAS COHORTES TRUNCADAS EN  
EIDADES DISTINTAS**

<b>Cohortes hipotéticas</b>		<b>Equis cuadrado</b>
1960	Ajustada Prueba	0,215 0,147
1963	Ajustada Prueba	0,311 0,257
1966	Ajustada Prueba	0,336 0,180
1969	Ajustada Prueba	0,204 0,119

Cuadro 7

**PERU: COMPARACION DE LOS VALORES DE EQUIS CUADRADO  
DE LAS MISMAS COHORTES TRUNCADAS EN EIDADES DISTINTAS**

<b>Cohortes hipotéticas</b>		<b>Equis cuadrado</b>
1960	Ajustada Prueba	0,324 0,252
1963	Ajustada Prueba	0,259 0,104
1966	Ajustada Prueba	0,229 0,163
1969	Ajustada Prueba	0,133 0,102

## APENDICE

### METODO DE AJUSTE

En esta parte del trabajo se siguen las sugerencias del profesor Albino Bocaz, del Centro Latinoamericano de Demografía, quien elaboró un método analítico para el ajuste cuando se emplea la función de Gompertz.

Sea la función de Gompertz:

$$Y(t) = KA^{B^t}; \quad K > 0; \quad 0 < A < 1; \quad 0 < B < 1, \quad (1)$$

donde  $K$ ,  $A$  y  $B$  son los parámetros por determinar;  $t$  representa la edad y  $Y(t)$  la fecundidad acumulada hasta la edad  $t$  inclusive. Y aun,  $Y$  es una variable dependiente y  $t$  una variable independiente. Esto representa un problema de regresión simple, pues  $Y$  depende solamente de  $t$ , pero una regresión no puede reducirse a una forma lineal; por el contrario, tratase de una regresión curvilínea.

Obteniendo los logaritmos naturales de (1):

$$\ln y = \ln K + B^t \ln A \quad (2)$$

y derivando:

$$\frac{1}{y} dy = \frac{dK}{K} + B^t \frac{dA}{A} + t \cdot B^t \cdot \ln A \cdot \frac{dB}{B}$$

$$dy = y \cdot \frac{dK}{K} + y \cdot B^t \cdot \frac{dA}{A} + y \cdot t \cdot B^t \cdot \ln A \cdot \frac{dB}{B}$$

$$x_1 = x_2 \cdot c_1 + x_3 \cdot c_2 + x_4 \cdot c_3 \quad (3)$$

de donde:

$$x_1 = \frac{dy}{y} \quad c_1 = \frac{dK}{K}$$

$$x_2 = y \quad c_2 = \frac{dA}{A}$$

$$x_3 = y \cdot B^t \quad c_3 = \ln A \cdot \frac{dB}{B}$$

$$x_4 = y \cdot t \cdot B^t$$

La ecuación (3) es la fórmula corriente de correlación lineal múltiple:

$$[X_1] = [X] [C],$$

en donde  $X$  es la matriz cuyas columnas son  $x_2, x_3, x_4$  y  $C$  es el vector de los componentes  $c_1, c_2$  y  $c_3$ . Para despejar  $c$ , se multiplican ambos términos de la ecuación por la inversa de  $X(X')$ .

$$\text{Entonces:} \quad X' X_1 = X' X C$$

$$\text{Despejando:} \quad C = (X' X)^{-1} X' X_1$$

Para poder formar la matriz  $X$  se necesitan los valores de las constantes  $K, A$  y  $B$ . A estas constantes se les atribuye un valor inicial  $K_0, A_0$  y  $B_0$ , que se calcula por el método de grupos que se verá posteriormente. Cálculanse sucesivamente  $K_1, A_1, B_1; K_2, A_2, B_2$ ; etc., hasta que las diferencias de los valores  $i$  con los anteriores  $i-1$  sean insignificantes.

De la ecuación (3) tenemos:

$$\frac{dK}{K} = c_1$$

$$\therefore dK = c_1 \cdot K$$

$$\text{Entonces:} \quad K_1 = K_0 (1 + c_1)$$

$$\text{En general:} \quad K_{i+1} = K_i (1 + c_1)$$

$$\frac{dA}{A} = c_2$$

$$\therefore dA = c_2 \cdot A$$

$$\text{Entonces:} \quad A_1 = A_0 (1 + c_2)$$

$$\text{En general:} \quad A_{i+1} = A_i (1 + c_2)$$

$$\ln a \frac{dB}{B} = c_3$$

$$\therefore dB = \frac{B}{\ln A_0} \cdot c_3$$

$$\text{Entonces:} \quad B_1 = B_0 \left(1 + \frac{c_3}{\ln A_0}\right)$$

$$\text{En general:} \quad B_{i+1} = B_i \left(1 + \frac{c_3}{\ln A_i}\right)$$

Si los valores del vector  $c$  resultaran muy pequeños y los valores  $i+1$  se aproximarán a los de  $i$ , ello indicaría valores aceptables de las constantes.

## Método de grupos para estimar $K_0$ , $A_0$ y $B_0$

Los logaritmos del vector se obtienen de los valores observados (tasas acumuladas por edad) y sus elementos se dividen en 3 grupos iguales. El resto del mayor valor múltiplo de 3 se abandona. La sumatoria de cada grupo es:  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ .

De la ecuación (2) se tiene:

$$\text{para } x = 0 \quad \ln y_0 = \ln K + \ln A$$

$$\text{para } x = 1 \quad \ln y_1 = \ln K + B \ln A$$

$$\text{para } x = 2 \quad \ln y_2 = \ln K + B^2 \ln A$$

.

.

.

$$\text{para } x = n-1 \quad \ln y_{n-1} = \ln K + B^{n-1} \ln A$$

$$\text{De donde: } S_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \ln y_j = n \ln K + \ln A \cdot \frac{B^n - 1}{B - 1}$$

$$S_2 = \sum_{j=n}^{2n-1} \ln y_j = n \ln K + B^n \ln A \cdot \frac{B^n - 1}{B - 1}$$

$$S_3 = \sum_{j=2n}^{3n-1} \ln y_j = n \ln K + B^{2n} \ln A \cdot \frac{B^n - 1}{B - 1}$$

Del sistema de ecuaciones anteriores:

$$S_2 - S_1 = \ln A \cdot \frac{(B^n - 1)^2}{B - 1}$$

$$S_3 - S_2 = \ln A \cdot \frac{(B^n - 1)^2}{B - 1} \cdot B^n$$

$$\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} = B^n$$



Entonces:

$$B_0 = \sqrt[n]{\frac{S_3 \cdot S_2}{S_2 \cdot S_1}}$$

$$\ln A_0 = (S_2 - S_1) \cdot \frac{B_0 - 1}{(B_0^n - 1)^2}$$

$$\ln k_0 = \frac{1}{n} \left( S_1 - \frac{S_2 \cdot S_1}{B_0^n - 1} \right)$$

Como complemento se pueden calcular otras 2 medidas que ayudan a comprender mejor el desenvolvimiento de la fecundidad. Tales medidas son:

- a) Edad mediana (M); es la edad a que una cohorte completa el 50 por ciento de su fecundidad total;
- b) Intervalo intercuartil (R); es el número necesario de años para que se complete el 50 por ciento de la fecundidad total de la cohorte.

Sea la función de Gompertz:

$$Y(t) = KA^{B^t}; \quad K > 0; \quad 0 < A < 1; \quad 0 < B < 1$$

en donde  $K$ ,  $A$  y  $B$  son los parámetros por determinar,  $t$  representa la edad y  $Y(t)$  la fecundidad acumulada hasta la edad  $t$  inclusive.

Sea  $t_c$  la edad final del período reproductivo y  $t_i$  una edad cualquiera del mismo período. Entonces:

$$\frac{Y(t_i)}{Y(t_c)} = A^{B^{t_i}} \cdot B^{t_c} = \frac{i}{4}, \quad (1)$$

donde  $Y(t_i)$  representa el total de los hijos nacidos vivos hasta la edad  $t_i$  inclusive e  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Resolviendo la ecuación (1) para  $i = 2$  se obtiene  $M$ .

$$M = t_2 = (\ln B)^{-1} \ln \left[ \frac{\ln 0,5 \cdot A^{B^{t_c}}}{\ln A} \right] \quad (2)$$

Resolviendo la ecuación (1) para  $i = 1$  e  $i = 3$ , para obtener  $R$ , tenemos:

$$R = t_3 - t_1 = (\ln B)^{-1} \left[ \ln \left( \frac{\ln 0,75 \cdot A^{B^{t_c}}}{\ln 0,25 \cdot A^{B^{t_c}}} \right) \right] \quad (3)$$

## BIBLIOGRAFIA

- Carrasco, Enrique, *Modelos matemáticos para ajustar curvas cumulativas de fecundidad*, serie C, N<sup>o</sup>. 137, CELADE.
- Denton, Frank y Byron, Spencer G., "Some Demographic Consequences of changing Cohort Fertility Patterns: An Investigation using the Gompertz Function", *Population Studies*, 28, 2.
- Martin, Peter, "Une application des fonctions de Gompertz A l'Etude de la fécondité d' une cohorte", *Population*, 1967, N<sup>o</sup>. 6.
- Murphy, E.M. y Nagnur, D.N., "Gompertz Fit that fits: Applications to Canadian Fertility Patterns", *Demography*, 9, 1, (febrero, 1972) pp. 35-50.

